



# 矿业科学学报

## JOURNAL OF MINING SCIENCE AND TECHNOLOGY

非均匀应力场中矩形巷道围岩塑性区扩展规律及等效外接圆理论解析方法

郭晓菲, 靳祎炜, 张红凯

**Expansion patterns of plastic zone in surrounding rock of rectangular roadway in non-uniform stress field and equivalent circumcircle analytical method**

引用本文:

郭晓菲, 靳祎炜, 张红凯. 非均匀应力场中矩形巷道围岩塑性区扩展规律及等效外接圆理论解析方法[J]. *矿业科学学报*, 2024, 9(6): 870–883.

GUO Xiaofei, JIN Yiwei, ZHANG Hongkai. Expansion patterns of plastic zone in surrounding rock of rectangular roadway in non-uniform stress field and equivalent circumcircle analytical method[J]. *Journal of Mining Science and Technology*, 2024, 9(6): 870–883.

### 您可能感兴趣的其他文章

#### 1. 不同倾角充-岩组合体三轴压缩力学特性及破坏特征

引用本文: 徐文彬, 陈伟. 不同倾角充-岩组合体三轴压缩力学特性及破坏特征[J]. *矿业科学学报*, 2023, 8(5): 633–641.

#### 2. 不同叠交角度下盾构重叠隧道地层位移规律研究

引用本文: 杨志勇, 牛宇哲, 丁耀文, 等. 不同叠交角度下盾构重叠隧道地层位移规律研究[J]. *矿业科学学报*, 2023, 8(4): 519–528.

#### 3. 深井嵌套式变截面巷道交岔点稳定性控制研究

引用本文: 武毅艺, 谢生荣, 张玉. 深井嵌套式变截面巷道交岔点稳定性控制研究[J]. *矿业科学学报*, 2022, 7(6): 720–729.

#### 4. 粒径大小对颗粒堆积体Burgers模型蠕变参数相似试验研究

引用本文: 马志奇, 杨小彬, 刘腾辉, 等. 粒径大小对颗粒堆积体Burgers模型蠕变参数相似试验研究[J]. *矿业科学学报*, 2022, 7(6): 730–737.

#### 5. 土压作用下面层弯矩和挠度计算方法研究

引用本文: 汪学清, 汪壮壮, 王建华. 土压作用下面层弯矩和挠度计算方法研究[J]. *矿业科学学报*, 2022, 7(4): 467–473.

郭晓非, 靳祎炜, 张红凯. 非均匀应力场中矩形巷道围岩塑性区扩展规律及等效外接圆理论解析方法[J]. 矿业科学学报, 2024, 9(6): 870-883. DOI: 10.19606/j.cnki.jmst.2024925

GUO Xiaofei, JIN Yiwei, ZHANG Hongkai. Expansion patterns of plastic zone in surrounding rock of rectangular roadway in non-uniform stress field and equivalent circumscribed analytical method [J]. Journal of Mining Science and Technology, 2024, 9(6): 870-883. DOI: 10.19606/j.cnki.jmst.2024925

# 非均匀应力场中矩形巷道围岩塑性区扩展规律 及等效外接圆理论解析方法

郭晓菲<sup>1,2</sup>, 靳祎炜<sup>1</sup>, 张红凯<sup>1</sup>

1. 中国矿业大学(北京)能源与矿业学院, 北京 100083;
2. 煤炭行业巷道支护与围岩控制工程研究中心, 北京 100083

**摘要:** 矩形巷道在煤矿井下应用广泛, 但其周围应力分布复杂, 其围岩塑性区状态难以进行理论解析。通过数值模拟方法探究不同宽高比矩形巷道在非均匀应力场中围岩塑性区的扩展规律, 从塑性区形态、范围、集中位置三个维度与对应外接圆进行映射对照, 提出矩形巷道围岩塑性区的等效外接圆理论解析方法。研究表明: ① 非均匀应力场中矩形与对应外接圆巷道围岩塑性区形态演化规律一致, 均呈现圆形、椭圆形、蝶形3种形态; ② 矩形巷道宽高比  $\nu < 2$  时 (已满足现场实际需要), 塑性区最大半径不超过对应外接圆的15%,  $\nu$  值越接近1等效外接圆理论解析方法的误差越小, 当  $\nu=1$  时误差趋近于0; ③ 出现蝶形塑性区后矩形与对应外接圆巷道塑性区蝶叶角收敛值均集中在  $34^\circ \sim 39^\circ$ , 当  $\nu < 2$  时, 两者蝶叶角差值在  $1^\circ \sim 3^\circ$ ; ④ 非均匀应力场中  $\nu < 2$  时塑性区形态、范围、主要集中位置可通过等效外接圆方法进行理论解析。

**关键词:** 蝶形塑性区; 矩形巷道; 非均匀应力场; 等效外接圆

中图分类号: TD 322

文献标志码: A

文章编号: 2096-2193(2024)06-0870-14

## Expansion patterns of plastic zone in surrounding rock of rectangular roadway in non-uniform stress field and equivalent circumscribed analytical method

GUO Xiaofei<sup>1,2</sup>, JIN Yiwei<sup>1</sup>, ZHANG Hongkai<sup>1</sup>

1. School of Energy and Mining Engineering, China University of Mining and Technology-Beijing, Beijing 100083, China;
2. Research Center of Roadway Support and Disaster Prevention Engineering in Coal Industry, Beijing 100083, China

**Abstract:** Rectangular roadway is widely used in coal mine as a type of roadway section with easy excavation, simple support and high space utilization. Yet it is difficult to analyze the state of its plastic zone in the surrounding rock because of complex stress distribution. This study conducted numerical simulation to investigate the expansion patterns of plastic zone in surrounding rock of the rectangular roadway with different width-to-height ratio in the non-uniform stress field. The mapping between the plastic zone shape, range and concentration position was compared with the corresponding circumscribed circle, based on which we proposed a analytical method for the equivalent circumscribed circle of the plastic zone in the surrounding rock of the rectangular roadway. The result show that: ① In the non-u-

收稿日期: 2024-06-19 修回日期: 2024-07-17

基金项目: 国家自然科学基金(52004289); 中央高校基本科研业务费(2022XJNY01)

作者简介: 郭晓菲(1990—), 男, 山西晋中人, 博士, 副教授, 主要从事巷道围岩破坏机理与稳定性控制等方面的研究工作。Tel: 15201290185, E-mail: 15201290185@163.com

niform stress field, the shape evolution of the plastic zone in the surrounding rock of the rectangular roadway is consistent with that of the corresponding circumcircle roadway, exhibiting a round, oval and butterfly shape. ② When the width-height ratio  $\nu$  of a rectangular roadway is less than 2 (which has met the actual needs of the field), the maximum radius of the plastic zone is less than 15% of the corresponding circumcircle roadway. Smaller  $\nu$  value leads to lower error between the two, and the error approximates 0 when the  $\nu = 1$ . ③ The butterfly leaf angle in the plastic zone of the rectangle and the corresponding circumcircle roadway exhibits convergence values between  $34^\circ$  and  $39^\circ$ , and the difference between their butterfly leaf angles is between  $1^\circ$  and  $3^\circ$  when  $\nu$  is less than 2. ④ When the width-height ratio  $\nu$  of a rectangular roadway is less than 2 in the non-uniform stress field, the shape, range and main concentration position of the plastic zone can be quantified using the equivalent circumscribed circle method.

**Key words:** butterfly plastic zone; rectangular roadway; non-uniform stress field; equivalent circumcircle

矩形巷道作为一种掘进容易、支护简单、空间利用率高的巷道断面类型在煤矿井下应用广泛,尤其作为准备巷道和回采巷道普遍采用<sup>[1-2]</sup>。矩形巷道围岩的弹塑性解析对于掌握巷道破坏规律、揭示围岩灾变机理及控制围岩稳定性,具有重要理论意义和实用价值。

针对矩形巷道周围应力场与塑性区的研究,目前多采用数值模拟方法<sup>[3-4]</sup>,然而数值解样本有限,难以揭示其普遍规律。理论计算方面,众多研究采用保角变换及复变函数方法,得到了矩形巷道轮廓上的应力解<sup>[5-9]</sup>,但对分析围岩破坏有意义的内部应力分布解却无能为力。因矩形巷道周围应力分布复杂,截至目前矩形巷道周围应力场及塑性区状态仍然无法用数学方法进行有效的理论解析<sup>[10-12]</sup>。

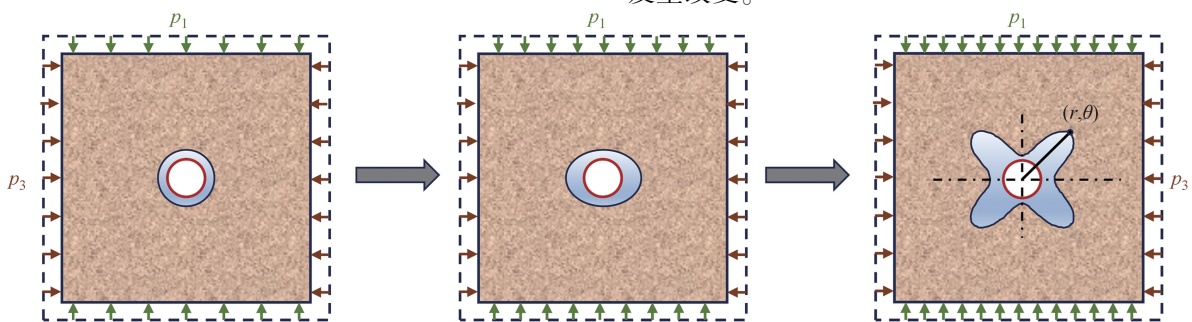
目前,矩形巷道、圆形巷道具有成熟的数学解析形态。圆形巷道围岩应力解<sup>[13]</sup>、芬那公式、卡斯特奈公式等,构成了经典的圆形巷道围岩弹塑性理论解析体系。此外,已有研究结果显示在相同应力条件下矩形巷道与圆形巷道围岩塑性区形态具有相似性<sup>[14-22]</sup>,因此两者之间应该存在某种对应关系。为探究非均匀应力场中矩形巷道与圆形巷道

围岩塑性区演化的对应关系,通过等效外接圆将两类巷道弹塑性解析联系,借助圆形巷道理论解析,将矩形巷道围岩弹塑性问题转化为等效外接圆的理论解析。通过探究不同宽高比矩形巷道围岩塑性区的扩展规律,从塑性区形态、范围、集中位置3个维度与对应外接圆进行映射对照,提出矩形巷道围岩塑性区的等效外接圆理论解析方法。

## 1 圆形巷道围岩塑性区扩展规律与理论解析方法

### 1.1 非均匀应力场中圆形巷道围岩受力模型

受地质构造、采动扰动等因素影响,巷道围岩通常处于复杂非均匀应力状态下。巷道围岩破坏形态、范围、集中位置复杂多变,但又呈现一定的规律,因此可将复杂的非均匀应力场进行简化处理。由于在一定范围,轴向应力对围岩塑性区影响较小,因此可忽略轴向应力影响;同时简化围岩性质,使其均匀化、连续化,将复杂的非均匀、非均质问题简化为简单的二维平面应变问题,如图1所示。定义围压比  $\eta = p_1/p_3$  表征非均匀应力场的非均匀程度。随  $\eta$  的变化,巷道围岩塑性区形态、范围随之发生改变。



$p_1$ —最大主应力; $p_3$ —最小主应力; $r, \theta$ —围岩任意点极坐标

图1 非均匀应力场圆形巷道受力模型示意图

Fig. 1 Schematic of stress model of circular roadway in non-uniform stress field

为方便对塑性区特征变化的研究,在巷道围岩受力模型的基础上,将围岩塑性区范围进行特征化处理,根据形态范围特征,以特征半径的形式表征巷道围岩塑性区内部区域的特征变化,如图2所示。

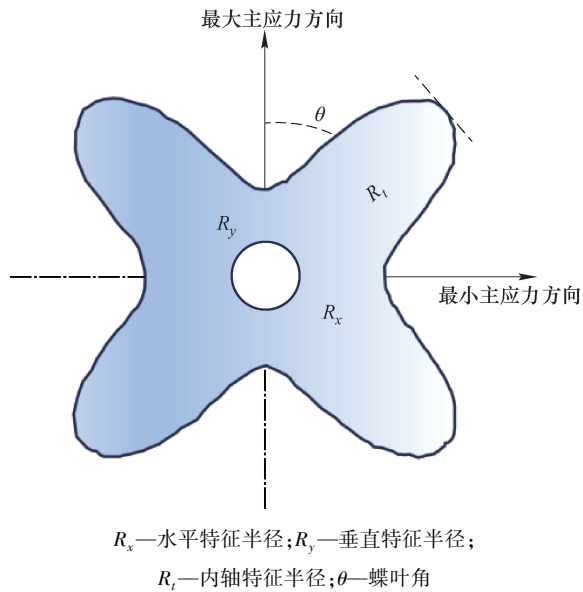


图2 特征半径示意图

Fig. 2 Schematic of characteristic radius

## 1.2 圆形巷道围岩塑性区扩展规律

巷道围岩塑性区特征表述主要包括形态、范围、集中位置3个因素。通过特征半径随 $\eta$ 的变化曲线,分析3个因素相应的变化关系,从而间接得出圆形巷道围岩塑性区扩展规律,如图3所示。

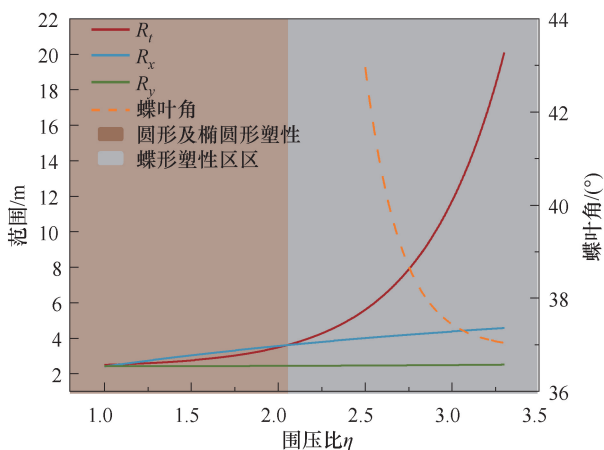


图3 圆形巷道围岩塑性区扩展规律

Fig. 3 Expansion patterns of plastic zone in surrounding rock of circular roadway

(1) 塑性区形态。塑性区形态随围压比 $\eta$ 的变化呈现圆形、椭圆形、蝶形3种形态。当 $\eta = 1$ 时,即巷道处于静水应力状态下时,塑性区形态呈

现圆形;当 $\eta > 1$ 时,塑性区形态逐渐转变为椭圆形;当 $\eta$ 取值进一步增大,塑性区形态最终转变为蝶形。

(2) 塑性区范围。在围岩条件不发生变化和相同塑性区形态下, $\eta$ 值越大,塑性区范围越大;尤其当塑性区形态为蝶形时,塑性区范围受 $\eta$ 影响变化明显。总体上,塑性区范围随围压比 $\eta$ 的增加呈指数上升。

(3) 塑性区集中位置。受主应力方向影响,塑性区集中位置变化呈现一定规律。当巷道处于静水应力状态下时,塑性区沿巷道表面向四周均匀扩展,形成一个与圆形巷道同心的大半径同心圆区域;当围压比 $\eta$ 增大,巷道所处应力状态发生改变,塑性区向最小主应力方向加速扩展,最终形成以最小主应力方向为长轴、最大主应力方向为短轴的椭圆形塑性区;当 $\eta$ 取值进一步增大,塑性区形态变化为蝶形,此时塑性区沿蝶叶角方向扩展,并集中于蝶叶角方向,随着 $\eta$ 取值的增加,蝶叶角呈现收敛趋势。

## 1.3 圆形巷道围岩塑性区理论解析方法

根据已有相关研究的非均匀应力场中圆形巷道围岩塑性区边界方程<sup>[20]</sup>、塑性区形态判定准则<sup>[21]</sup>、蝶形塑性区蝶叶位置夹逼准则<sup>[22]</sup>,对圆形巷道围岩塑性区范围、形态、集中位置展开理论描述。

### 1.3.1 塑性区范围理论解析

根据圆形巷道围岩塑性区形态演化特征可知,巷道围岩塑性区形态有圆形、椭圆形与蝶形3种形态。随着围岩力学属性、应力场状态等条件的变化,塑性区范围也会产生不同程度的变化。赵志强<sup>[20]</sup>借鉴芬那公式与卡斯特奈公式推导思想,通过弹塑性力学推出了非均匀应力场下圆形巷道围岩塑性区的边界方程:

$$f\left(\frac{a}{r}\right) = K_1\left(\frac{a}{r}\right)^8 + K_2\left(\frac{a}{r}\right)^6 + K_3\left(\frac{a}{r}\right)^4 + K_4\left(\frac{a}{r}\right)^2 + K_5 = 0 \quad (1)$$

$$K_1 = 9(1 - \eta)^2$$

$$K_2 = -12(1 - \eta)^2 + 6(1 - \eta^2)\cos 2\theta$$

$$K_3 = 2(1 - \eta)^2[\cos^2 2\theta(5 + 2\sin^2 \varphi) - \sin^2 2\theta] + (1 + \eta)^2 + 4(1 - \eta^2)\cos 2\theta$$

$$K_4 = -4(1 - \eta)^2\cos 4\theta - 2(1 - \eta^2)\cos 2\theta(1 + 2\sin^2 \varphi) + \frac{4C}{\gamma H}(1 - \eta)\cos 2\theta\sin 2\varphi$$

$$K_5 = (1 - \eta)^2 - \sin^2 \varphi \left( 1 + \eta + \frac{2C \cos \varphi}{p_1 \sin \varphi} \right)^2$$

式中,  $a$  为巷道半径,  $m$ ;  $C$  为黏聚力, MPa;  $\varphi$  为内摩擦角, ( $^\circ$ );  $H$  为巷道所处理深,  $m$ ;  $\gamma$  为覆岩平均容重,  $N/m^3$ 。  $r, \theta$  为极坐标系下的位置坐标。

根据式(1), 在已知巷道半径  $a$ 、围压比  $\eta$ 、黏

$$\tau = \frac{m_2}{2m_1} \tag{2}$$

$$m_1 = [12(1 - \eta)^2 - 4(1 - \eta)^2 \sin^2 \varphi] \left( \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1}}{2a_1} \right)^2 - 8(1 - \eta)^2 \left( \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1}}{2a_1} \right)$$

$$m_2 = 6(1 - \eta^2) \left( \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1}}{2a_1} \right)^3 - 4(1 - \eta^2) \left( \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1}}{2a_1} \right)^2 +$$

$$\left[ 2(1 - \eta^2) - 4(1 - \eta^2) \sin^2 \varphi - \frac{4C(1 - \eta) \sin^2 \varphi}{P_3} \right] \left( \frac{-b_1 + \sqrt{b_1^2 - 4a_1 c_1}}{2a_1} \right)$$

$$a_1 = \frac{6(\eta - 1)}{1 - \sin \varphi}$$

$$b_1 = (1 + \eta) - \frac{(3\eta - 5)(1 + \sin \varphi)}{(1 - \sin \varphi)}$$

$$c_1 = 2\eta - \frac{4C \cos \varphi}{p_1(1 - \sin \varphi)} - \frac{2(1 + \sin \varphi)}{1 - \sin \varphi}$$

$$\begin{cases} \tau = \infty, & \text{圆形} \\ \tau \geq 1 \text{ 或 } \leq 0, & \text{椭圆形} \\ 0 < \tau < 1, & \text{蝶形} \end{cases} \tag{3}$$

式中,  $\tau$  为形态系数, 是关于巷道半径  $a$ 、围压比  $\eta$ 、黏聚力  $C$ 、内摩擦角  $\varphi$ 、最大主应力  $p_1$ 、最小主应力  $p_3$  的解析式。

### 1.3.3 塑性区集中位置理论解析

当巷道围岩塑性区形成蝶形时, 蝶叶角随  $\eta$  增加逐渐趋于某一角度, 呈现收敛性质。郭晓菲<sup>[22]</sup> 利用摩尔-库仑准则分析摩尔圆圆心  $\sigma_m$ 、半径  $r_m$  与摩尔圆过原点的切线斜率  $k_m$ , 结合强度准则推导出其关于围岩位置  $\theta$  的解析表达式:

$$\sigma_m(\theta) = -p_3(\eta - 1) \left( \frac{a^2}{r^2} \right) \cos 2\theta + \frac{p_3(1 + \eta)}{2} \tag{4}$$

$$r_m(\theta) = \frac{P_3}{2} \sqrt{A_1 \cos^2 2\theta + B_1 \cos 2\theta + C_1} \tag{5}$$

$$k_m(\theta) = \frac{\sqrt{A_1 \cos^2 2\theta + B_1 \cos 2\theta + C_1}}{\sqrt{A_2 \cos^2 2\theta + B_2 \cos 2\theta + C_2}} \tag{6}$$

$$A_1 = (\eta - 1)^2 \left( \frac{24a^6}{r^6} + \frac{12a^4}{r^4} \right)$$

$$B_1 = 2(\eta^2 - 1) \left( \frac{3a^6}{r^6} + \frac{2a^4}{r^4} + \frac{a^2}{r^2} \right)$$

$$C_1 = -2(\eta^2 - 4\eta + 1) \frac{a^4}{r^4} +$$

聚力  $C$ 、内摩擦角  $\varphi$  的情况下, 可以对圆形巷道围岩塑性区范围进行理论解析。

### 1.3.2 塑性区形态理论解析

郭晓菲等<sup>[21]</sup> 以非均匀应力场下圆形巷道围岩塑性区的 8 边界方程为基础, 提出了圆形巷道围岩塑性区形态判定准则, 如

$$2(\eta - 1)^2 \frac{a^2}{r^2} + (\eta - 1)^2$$

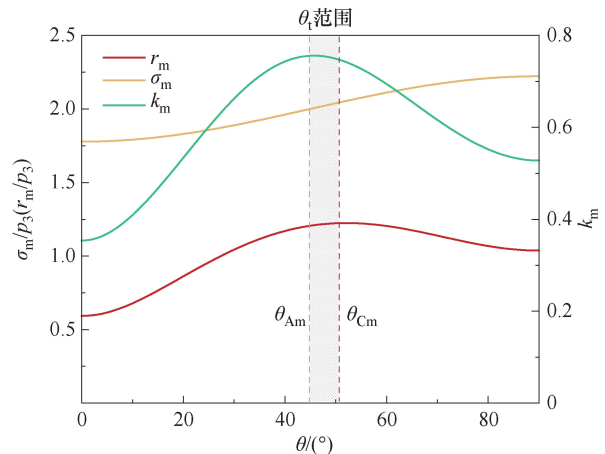
$$A_2 = (\eta - 1)^2 \left( -\frac{8a^4}{r^4} + \frac{8a^2}{r^2} \right)$$

$$B_2 = (\eta^2 - 1) \left( -\frac{4a^4}{r^4} - \frac{2a^2}{r^2} \right)$$

$$C_2 = (\eta - 1)^2 \left( -\frac{9a^8}{r^8} + \frac{12a^6}{r^6} - \frac{4a^2}{r^2} \right) +$$

$$(\eta^2 - 6\eta + 1) \frac{a^4}{r^4} + 4\eta$$

在围压比  $\eta$ 、围岩深度  $r/a$  一定的条件下, 摩尔圆圆心  $\sigma_m$ 、半径  $r_m$  与摩尔圆过原点的切线斜率  $k_m$  随围岩位置  $\theta$  在第一象限的变化曲线, 如图 4 所示。



$\theta_{Am}, \theta_{Cm}$ —分别为  $k_m, r_m$  在围岩环向位置第一象限内取得极大值时对应的角度;  $\theta_i$ —蝶叶角, ( $^\circ$ )

图4 摩尔圆3变量随  $\theta$  变化曲线 ( $\eta=3, r/a=3$ )

Fig. 4 Variation curve of three variables with  $\theta$  ( $\eta=3, r/a=3$ )

根据式(5)、式(6),  $\theta_{Am}$ 、 $\theta_{Cm}$  满足:

$$\begin{aligned} \frac{\partial k_m(r, \theta)}{\partial \theta} &= 0 \\ \frac{\partial r_m(r, \theta)}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

由图4可看出,  $\theta \in (0, \theta_{Am})$  时,  $\sigma_m$ 、 $r_m$ 、 $k_m$  随围岩位置  $\theta$  变化均呈单调递增趋势, 结合摩尔圆包络线与强度准则, 随  $\theta$  的增加, 围岩越容易发生破坏; 当  $\theta \in (\theta_{Cm}, 90^\circ)$  时,  $\sigma_m$ 、 $r_m$ 、 $k_m$  随围岩位置  $\theta$  变化均呈单调递减趋势, 随  $\theta$  的增加, 围岩越不容易发生破坏。因此, 蝶叶角  $\theta_l$  位置一定出现在  $(\theta_{Am}, \theta_{Cm})$  区间且蝶叶角  $\theta_l$  满足:

$$\theta_{Am} \left( \frac{r}{a}, \eta \right) \leq \theta_l \left( \frac{r}{a}, \eta \right) \leq \theta_{Cm} \left( \frac{r}{a}, \eta \right) \quad (8)$$

结合式(7)、式(8), 将  $\theta_{Am}$ 、 $\theta_{Cm}$  取值进行夹逼处理可以对  $\theta_l$  进行理论解析。

## 2 方形巷道围岩塑性区扩展规律及其与圆形巷道联系

### 2.1 数值模拟方法

方形巷道围岩塑性区形态表现规律与圆形巷道相似<sup>[22-23]</sup>。方形巷道作为宽高比  $\nu=1$  的特殊矩形巷道, 其围岩塑性区扩展规律可为矩形巷道的研究提供一定的理论依据。

以外接圆的形式将圆形与方形断面巷道相联系, 如图5所示。记录圆形与方形断面巷道在一定围岩应力环境下塑性区形态、范围、集中位置变化情况, 对比分析圆形与方形巷道塑性区特征。

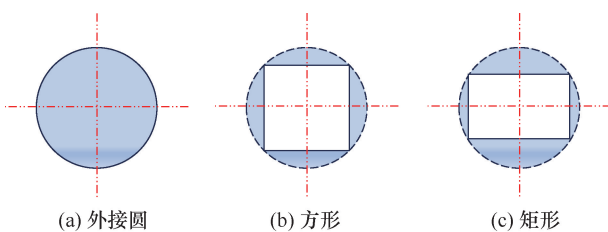


图5 外接圆模型示意图

Fig. 5 Schematic of the circumscribed circle model

考虑到实际生产中, 矩形或方形巷道高度通常为4 m左右, 实验以4 m高度的方形巷道断面为研究对象, 其外接圆巷道半径为2.82 m。

#### 2.1.1 方形巷道数值模拟模型建立

在相同的围岩及应力条件下, 对方形及其外接圆巷道围岩塑性区扩展形态、范围、集中位置进行对比分析。利用FLAC<sup>3D</sup>进行数值模拟, 忽略塑性区在巷道轴向上的变化, 建立长、高、宽分别为100、100、1 m的模型。将模型  $x=48 \sim 52$  m、 $z=48 \sim 52$  m、 $y=$

0~1 m区域划分为巷道范围, 进行挖空, 在巷道四周20 m范围内网格进行加密处理, 网格大小为0.2 m×0.2 m×1 m, 其他网格大小为1 m×1 m×1 m, 对模型所有边界进行位移约束, 采用摩尔-库仑准则本构模型进行模拟, 围岩相关参数见表1。

表1 围岩参数赋值<sup>[22]</sup>

Table 1 Parameter assignment of surrounding rock

$\varphi/(\circ)$	$C/\text{MPa}$	$\sigma_t/\text{MPa}$	$K/\text{GPa}$	$G/\text{GPa}$
28	3	1.1	2.68	4.5

注:  $\sigma_t$ —抗拉强度;  $K$ —体积模量;  $G$ —剪切模量。

初始围压  $p_1$ 、 $p_3$  均设为10 MPa, 随后增加  $p_1$  值来实现围压比  $\eta$  的变化, 并通过FISH语言计算模型塑性区特征半径及蝶叶角。

#### 2.1.2 外接圆巷道数值模拟模型建立

在模型中间位置挖出半径为2.82 m的圆形巷道, 对放射状网格区域进行加密, 沿巷道环向位置设置240个网格, 沿放射方向设置200个网格, 放射区域为  $x=30 \sim 70$  m、 $z=30 \sim 70$  m、 $y=0 \sim 1$  m, 其他网格大小为1 m×1 m×1 m, 对模型所有边界进行位移约束, 采用摩尔-库仑准则本构模型进行模拟计算, 围岩相关参数见表1。

## 2.2 方形巷道围岩塑性区扩展规律

### 2.2.1 塑性区范围

随围压比  $\eta$  增大, 巷道塑性区范围随之发生变化, 将特征半径随  $\eta$  的变化以散点形式标出并进行代数拟合, 结果如图6所示。可以看出: ① 水平、垂直特征半径随  $\eta$  变化呈线性增加, 而内轴特征半径随  $\eta$  变化呈指数上升; ② 水平特征半径在整个围压比  $\eta$  的变化过程中, 始终大于垂直特征半径; ③ 水平特征半径的斜率大于垂直特征半径, 即水平特征半径扩展速率大于垂直特征半径扩展速率; ④ 塑性区扩展初期, 内轴特征半径小于另外两者, 随  $\eta$  增加逐渐居上并超越。

由图7可看出: ① 当  $\eta=1$  时, 静水应力状态下, 巷道围岩发生均匀破坏, 塑性区沿巷道表面向围岩深处扩展, 水平、垂直、内轴特征半径扩展表现近乎一致; ② 当  $\eta \in (1, 2]$  时, 围岩塑性区产生非均匀变化, 主要沿最小主应力方向扩展, 从特征半径角度来看, 水平特征半径扩展速率大于垂直特征半径扩展速率, 内轴半径扩展速率始终大于垂直特征半径扩展速率, 同时, 轴半径始终小于水平半径; ③ 当  $\eta > 2$  时, 内轴半径扩展速率逐渐增加, 半径范围呈指数上升, 逐渐超过水平特征半径。

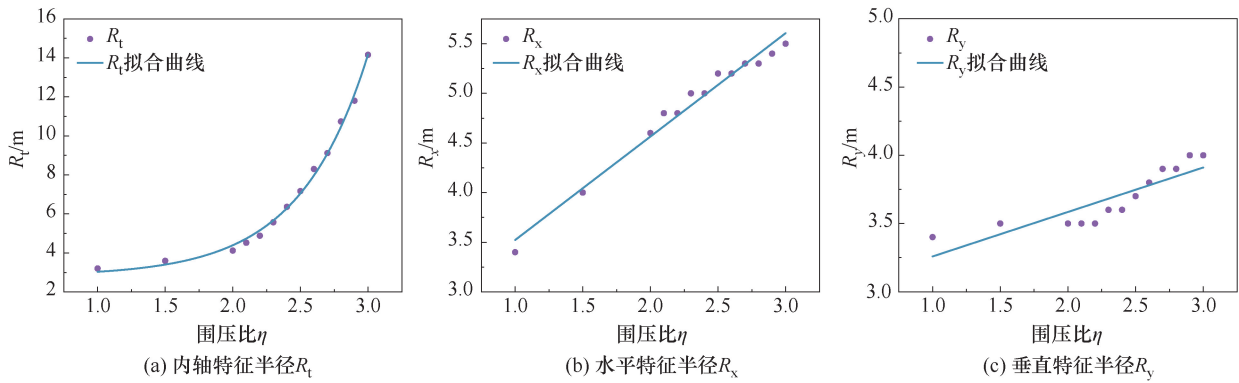


图 6 特征半径及拟合曲线

Fig. 6 Characteristic radius and its fitting curve

在整个塑性区扩展过程中,水平方向即最小主应力方向塑性区范围始终大于垂直方向即最大主应力方向,内轴半径扩展速率逐渐增大,其范围随围压比  $\eta$  的增加,逐渐成为方形巷道围岩塑性区

的主要部分。

### 2.2.2 塑性区形态

方形巷道围岩塑性区形态可划分为圆形、椭圆形、蝶形 3 种,如图 7 所示。

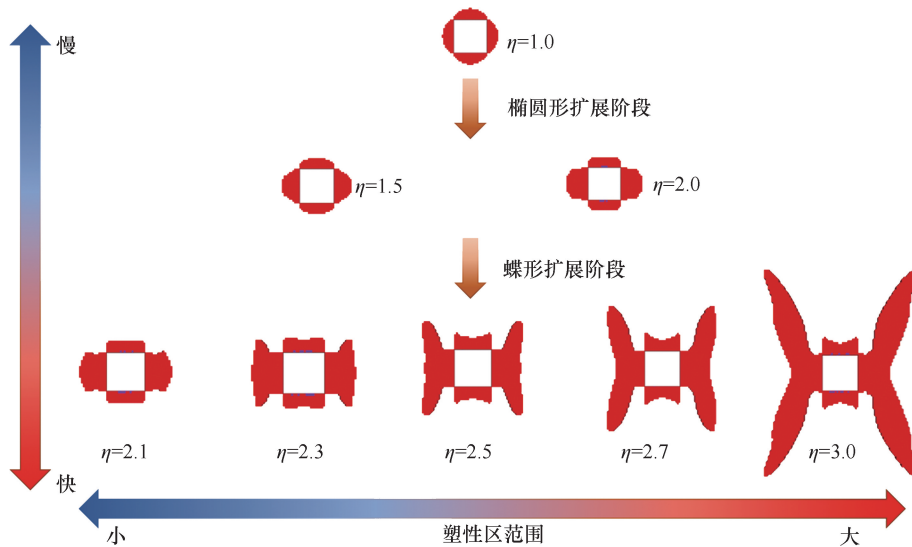


图 7 方形巷道围岩塑性区随围压比  $\eta$  变化

Fig. 7 Variations of plastic zone in surrounding rock of square roadway with confining pressure ratio  $\eta$

当内轴特征半径  $R_t$  等于水平特征半径  $R_x$  时,塑性区扩展形态由近椭圆形转变为蝶形,所对应的围压比  $\eta = \alpha$ 。因此,以  $\eta = \alpha$  为分界线,将全曲线范围划分为圆形及椭圆形区域、蝶形区域两部分。 $1 \leq \eta \leq \alpha$  时为圆形及椭圆形区域,  $\eta > \alpha$  时为蝶形区域,如图 8 所示。

可以看出:① 当巷道处于静水压力下时,巷道围岩塑性区均匀扩展,水平、垂直、内轴半径方向塑性区扩展范围相近,呈圆形形态;② 当等压状态被破坏,围岩塑性区沿最小主应力方向加速扩展,此时形态由圆形转变为椭圆形;③ 当围压比大于  $\alpha$  时,塑性区形态由椭圆形转变为蝶形,扩展速率增加。

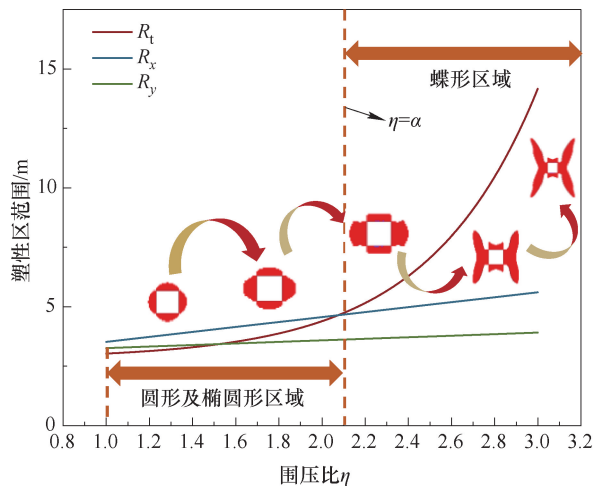


图 8 方形巷道塑性区形态

Fig. 8 Plastic zone shape of square roadway

2.2.3 塑性区集中位置

结合上述分析,当巷道处于静水应力状态时,巷道围岩塑性区向四周均匀扩展,无明显方向性;随 $\eta$ 值发生变化,巷道产生非均匀破坏,塑性区沿最小主应力方向向四周扩展,最小主应力方向塑性区范围较大;随 $\eta$ 值进一步增加,巷道围岩产生蝶形破坏,塑性区扩展方向产生偏转,沿蝶叶角方向扩展。

当 $\eta$ 值增加致使方形巷道围岩发生蝶形破坏时,塑性区扩展方向不再以最小主应力方向为主,塑性区扩展角度发生偏转;当 $\eta$ 值相对较小时,蝶叶角较大;随着 $\eta$ 值的进一步增加,蝶叶角呈收敛趋势,最终收敛角度约为 $37^\circ$ ,如图9所示。

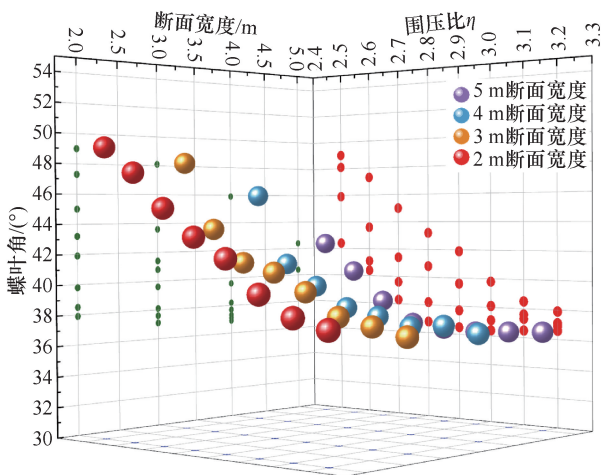


图9 不同断面宽度方形巷道塑性区蝶叶角变化

Fig.9 Variation of butterfly leaf angle in plastic zone of square roadway with different section widths

蝶叶角的收敛特性同样适用于其他尺寸的方形巷道断面,通常大尺寸巷道断面蝶叶角相较于小尺寸巷道断面蝶叶角会在 $\eta$ 更小时收敛,且最终收敛角度为 $36^\circ\sim 38^\circ$ 。

2.3 方形巷道与圆形巷道围岩塑性区联系

4 m 方形断面外接圆巷道半径约为 2.83 m,在相同围岩、应力条件下,方形巷道围岩塑性区特征半径 $R_t$ 、 $R_x$ 、 $R_y$ 与外接圆巷道围岩塑性区特征半径 $R_r$ 、 $R_{xr}$ 、 $R_{yr}$ 随围压比 $\eta$ 变化及对应特征半径差值曲线,如图10所示。

(1) 方形巷道与对应外接圆巷道围岩塑性区内轴特征半径差值随围压比 $\eta$ 增减不明显,平均差值约为0.82 m;水平特征半径差值随 $\eta$ 的增加,略微上升,平均差值约为0.47 m;垂直特征半径增长幅度较小,且随围压比增加,方形巷道垂直特征

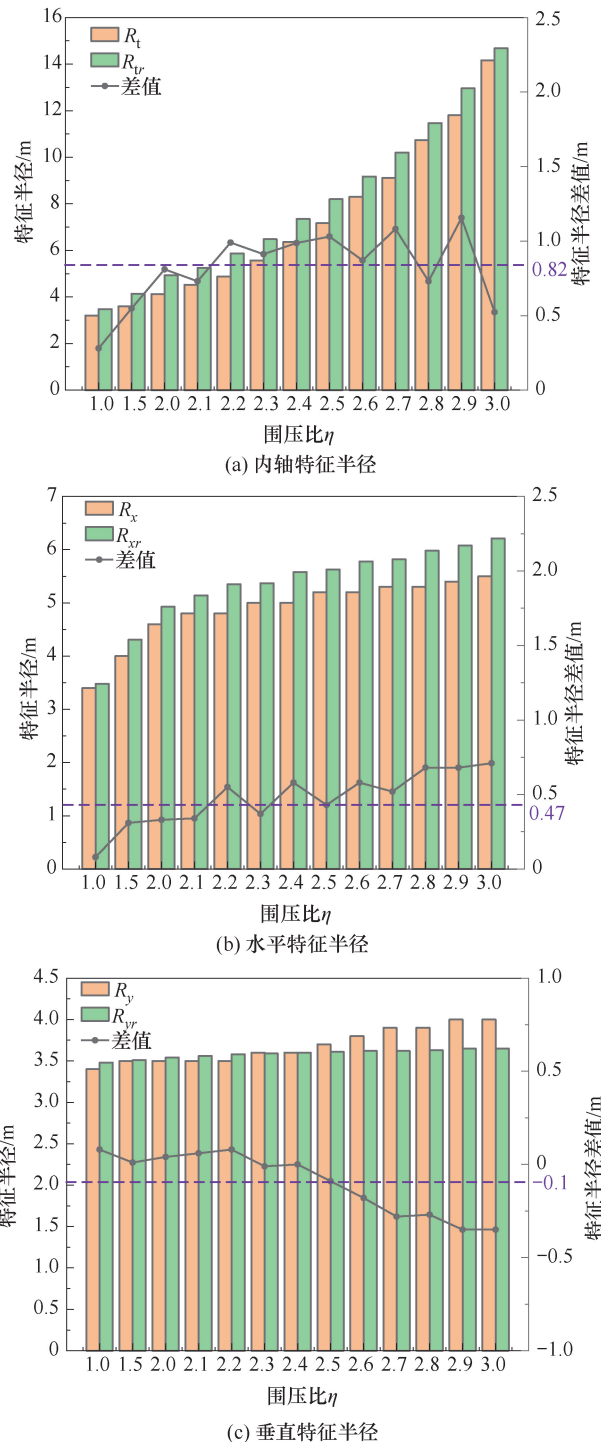


图10 方形巷道及其外接圆巷道特征半径变化差值

Fig.10 Difference value of characteristic radius of square roadway and its circumscribed roadway

半径范围逐渐大于对应外接圆巷道;方形巷道围岩塑性区垂直特征半径随 $\eta$ 的增加,变化范围较小。因此,外接圆巷道围岩塑性区范围略大于方形巷道围岩塑性区,平均差值均小于1 m。

(2) 方形巷道与对应外接圆巷道塑性区特征半径随围压比变化趋势一致。内轴特征半径随围

压比增加呈指数型上升趋势,水平、垂直特征半径随围压比增加呈线性上升趋势。这种变化趋势反映到塑性区形态上,说明两者塑性区形态演化规律一致。

(3) 根据方形、圆形巷道围岩塑性区扩展规律可知:当  $\eta=1$  时,巷道处于等压状态,2 种断面巷道围岩塑性区均向四周均匀扩展;随着  $\eta$  的增加,两种断面巷道围岩塑性区加速向最小主应力方形扩展; $\eta \geq \alpha$  时,出现蝶形破坏,蝶叶角随  $\eta$  值的增大逐渐收敛。在一定围岩条件下,2 种断面巷道蝶叶角收敛曲线,如图 11 所示。2 种断面巷道围岩塑性区蝶叶角随  $\eta$  变化趋势相近,蝶形扩展初期方形巷道扩展角略大于外接圆巷道;随  $\eta$  值增加,外接圆巷道扩展角逐渐大于方形巷道,当  $\eta$  足够大时,两巷扩展角收敛角度趋于一致,角度差值绝对值趋于 0。

### 2.4 等效外接圆解析方法

综上所述,方形巷道与圆形巷道围岩塑性区扩展规律具有相似性,反映到本研究,即方形巷道与其外接圆巷道之间的联系。两者塑性区形态与塑性区集中位置演化规律具有一致性,塑性区范围演化规律具有相似性。外接圆巷道塑性区范围略大

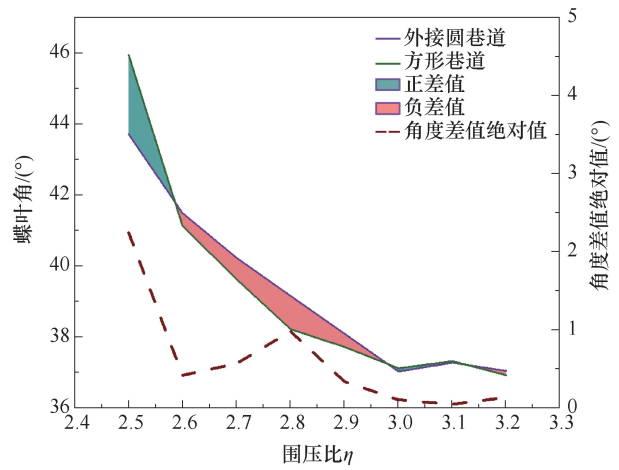


图 11 方形及其外接圆巷道蝶叶角变化及差值  
Fig. 11 Variation and difference value of butterfly leaf angle of square and its circumcircle roadway

于与其对应的方形巷道,平均差值小于 1 m;形态方面两断面类型巷道随  $\eta$  的变化均呈现圆形、椭圆形、蝶形 3 种形态;塑性区蝶叶角收敛角度趋于一致,收敛过程中略有差异。根据方形巷道及其外接圆巷道在塑性区扩展规律上具有相似性,提出等效外接圆理论解析方法,解决理论及实际生产中方形巷道围岩破坏相关问题,如图 12 所示。

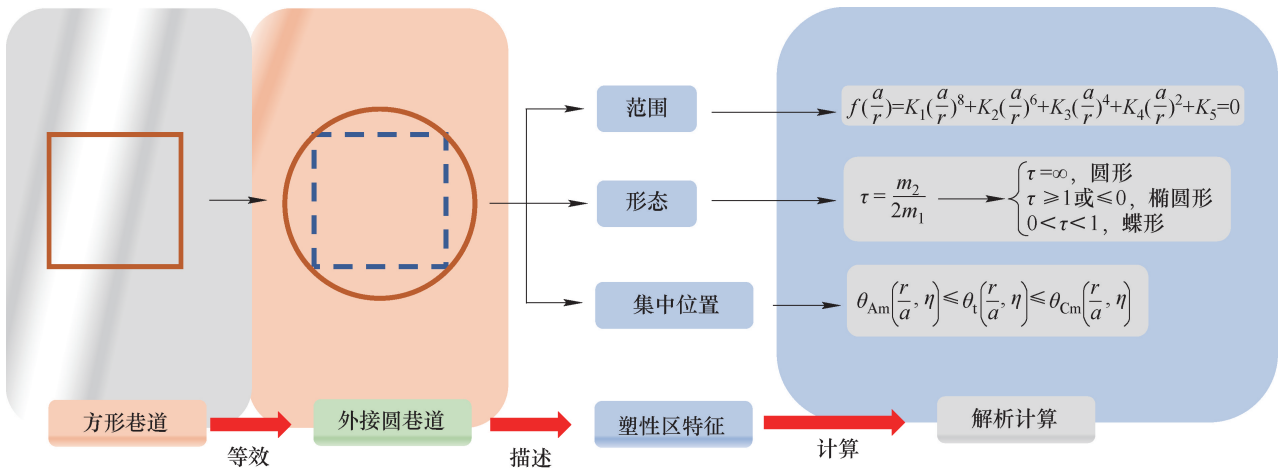


图 12 等效外接圆解析方法  
Fig. 12 Equivalent circumcircle analytical method

## 3 矩形巷道围岩塑性区扩展规律与解析方法

### 3.1 矩形巷道数值模拟模型

在方形巷道的基础上,保持巷道高度不变,增加巷道宽度  $D$  来改变巷道宽高比;同时,实际生产情况中通常宽高比  $\nu \leq 2$ ,因此仅讨论  $\nu \leq 2$  情况。

基于上文所建立的数值模拟模型,变化矩形巷道宽度分别为 5、6、7、8 m,对应外接圆半径分别为 3.2、3.6、4.03、4.47m,围岩岩性参数见表 1,采用摩尔-库仑准则本构模型,结合遍历函数,模拟不同  $\eta$  及  $\nu$  条件下围岩塑性区特征半径及蝶叶角变化情况。

### 3.2 矩形巷道塑性区扩展规律

#### 3.2.1 塑性区范围及集中位置扩展规律

根据特征半径范围及蝶叶角随  $\eta$  变化情况,

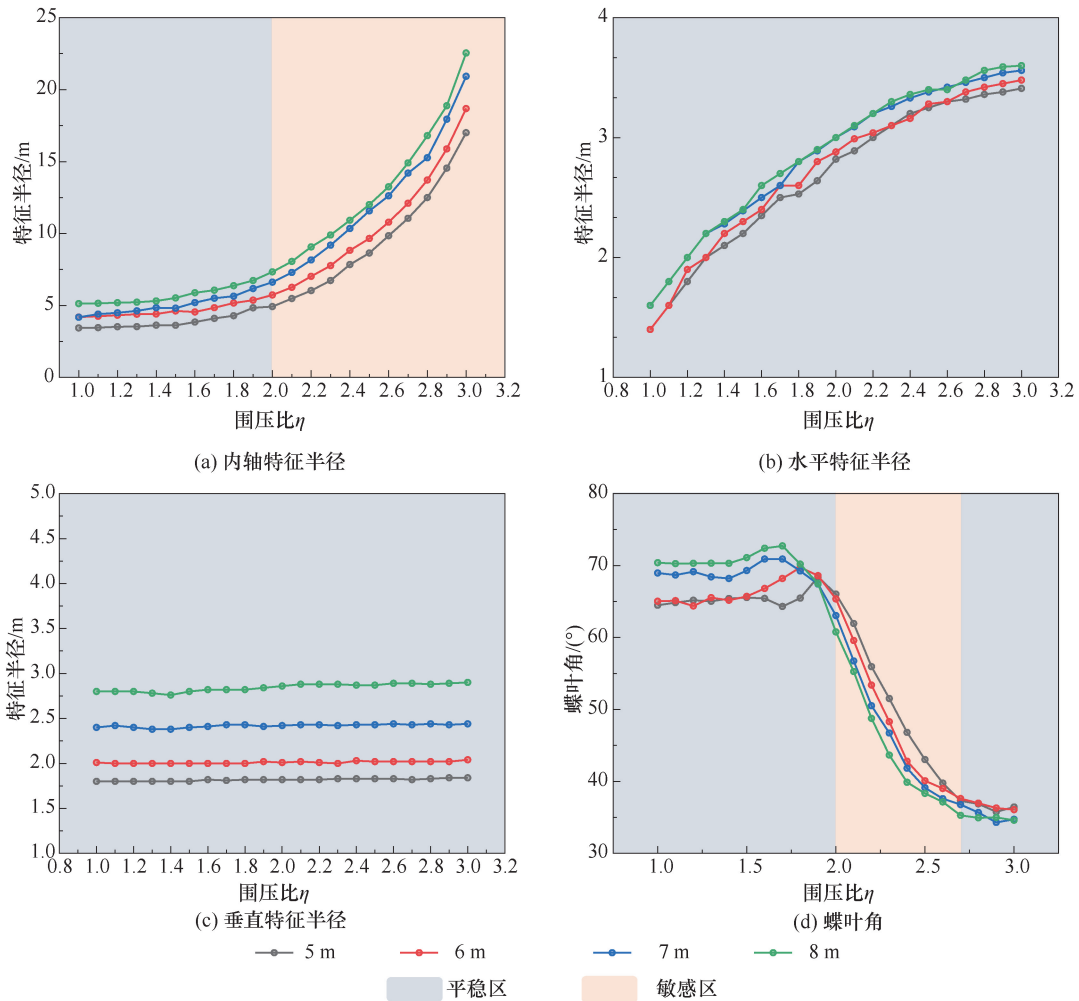


图 13 不同尺寸矩形巷道特征半径随围压比变化

Fig. 13 Variation of characteristic radius of rectangular roadway of different dimensions with confining pressure ratio

渐向敏感区过渡,如图 13(a)所示;水平、垂直特征半径整体呈平稳上升趋势,不存在敏感区,如图 13(b)(c)所示;蝶叶角随  $\eta$  变化呈现为平稳→敏感→平稳的区域变化,最终收敛于某一角度,如图 13(d)所示。巷道尺寸的变化只会影响塑性区尺寸、蝶叶角初始角度及最终收敛角度,塑性区扩展规律不发生变化。巷道  $\nu$  越大,特征半径范围越大,反映到塑性区中即为塑性区范围越大;同时,巷道  $\nu$  越大蝶叶角初始角度越大,但蝶叶角最终收敛角度越小。蝶叶角最终收敛角度随  $\nu$  变化有所差异,但相较于蝶叶角初始角度差距较小。

#### 3.2.2 塑性区形态扩展规律

不同宽度矩形巷道围岩塑性区形态扩展规律相似,如图 14 所示。当围压比较小时,塑性区主要

特征半径及蝶叶角的变化过程同时具有平稳与敏感两种属性,如图 13 所示。

随  $\eta$  变化,内轴特征半径呈现为由平稳区逐

出现在顶底板及巷道两帮位置,且塑性区范围较小,形态呈现为圆形、椭圆形;当围压比增加至某一数值时,巷道围岩塑性区的扩展开始出现明显方向性,沿某一角度进行扩展,逐渐形成蝶形塑性区。

在蝶形塑性区阶段,又可划分为蝶形扩展初期、蝶形扩展中期、蝶形扩展收敛期。蝶形扩展初期塑性区扩展开始出现方向性,此时蝶叶角偏大,且蝶叶角变化开始进入敏感区;蝶形扩展中期中塑性区扩展方向性明显,蝶形清晰可见,但蝶叶角还未收敛;蝶形扩展收敛期,塑性区范围较大,蝶叶扩展完全,蝶叶角变化进入平稳期,角度开始收敛。矩形巷道尺寸对其塑性区形态变化无影响,不同尺寸只会影响塑性区范围大小及蝶叶角收敛角度。

### 3.3 等效外接圆解析方法对矩形巷道的适用性

方形巷道作为特殊的矩形巷道,等效外接圆理论解析方法对其具有良好的适用性,而对于方法的

普适性分析,则需摆脱方形这种特殊的矩形巷道形状,分析不同宽高比矩形巷道对等效外接圆理论解析方法的适用性。

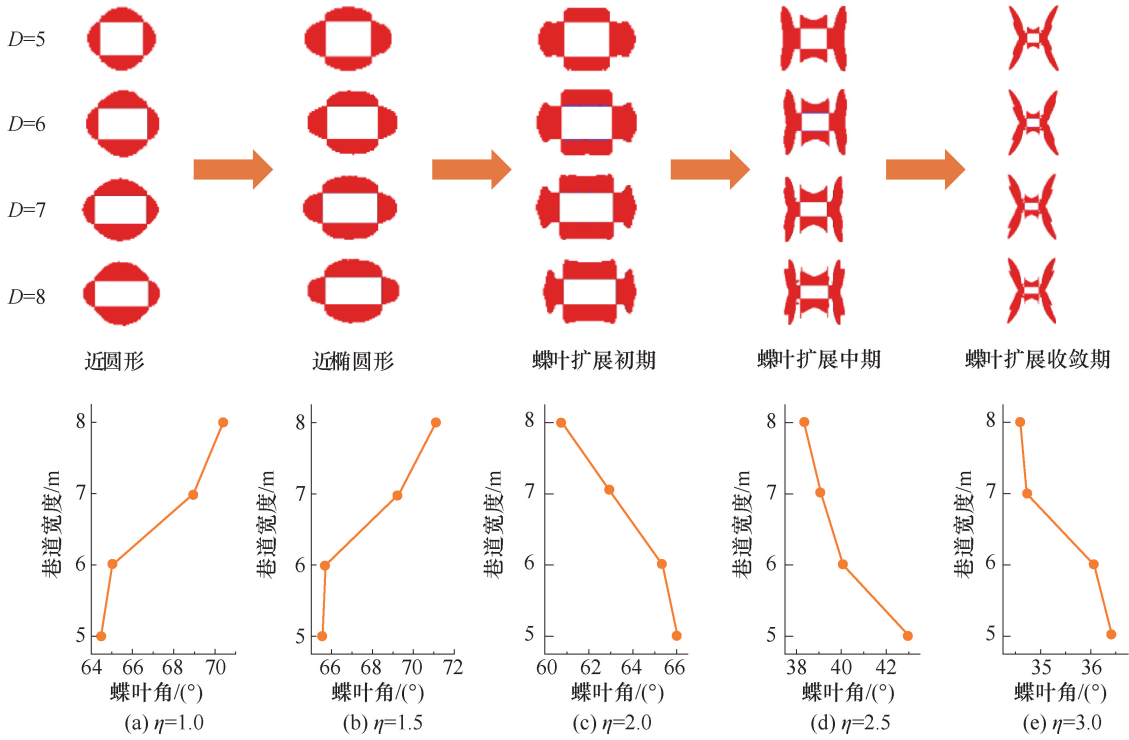


图 14 矩形巷道塑性区形态扩展规律

Fig. 14 Shape expansion patterns of plastic zone of rectangular roadway

#### 3.3.1 形态适用性

矩形巷道围岩塑性区形态变化随围压比增加呈现圆形、椭圆形、蝶形 3 种塑性区形态,其与圆形巷道形态变化一致。可见,等效外接圆理论解析方法的塑性区形态演化规律对矩形巷道具有良好的适用性。

#### 3.3.2 范围适用性

将不同宽度巷道通过数值模拟,得到塑性区分布情况,同时对比其对应外接圆巷道塑性区特征半径,如图 15 所示。

(1) 由图 15(a1) (b1) (c1) (d1) 可看出,在 η 较小时,矩形巷道围岩塑性区内轴特征半径  $R_l$  略小于其对应外接圆巷道围岩塑性区内轴特征半径  $R_{lr}$ ;随着 η 增大,  $R_l$  范围逐渐大于  $R_{lr}$  范围,且两者差距随 η 增加逐渐增大。

(2) 由图 15(a2) (b2) (c2) (d2) 可看出,η 较小时,矩形巷道围岩塑性区水平特征半径  $R_x$  大于其对应外接圆巷道围岩塑性区水平特征半径  $R_{xr}$ ;随着 η 增加,  $R_x$  逐渐小于  $R_{xr}$ ,且两者差距逐渐

增大。

(3) 由图 15(a3) (b3) (c3) (d3) 可看出,在全围压变化曲线下,矩形巷道围岩塑性区垂直特征半径  $R_y$  普遍大于其对应外接圆巷道围岩塑性区垂直特征半径  $R_{yr}$ ,且两者差值在全围压变化曲线中变化极小。

(4) 随 η 增加内轴特征半径差值  $|R_l - R_{lr}|$  与水平特征半径差值  $|R_x - R_{xr}|$  有增大趋势,垂直特征半径差值  $|R_y - R_{yr}|$  变化不明显。

不同尺寸两断面类型巷道围岩塑性区特征半径差值绝对值均值变化曲线,如图 16 所示。可以看出,当巷道宽度较小时等效外接圆理论解析方法适用性更强,且整个均值曲线,其特征半径平均差值范围均不大于 2 m。

综上所述,等效外接圆理论解析方法对不同宽度矩形巷道围岩塑性区范围的理论解析具备一定的适用性,且随巷道宽度的降低,适用性逐渐增强;当 ν = 1 时,塑性区范围差距极小,适用性最为优异。

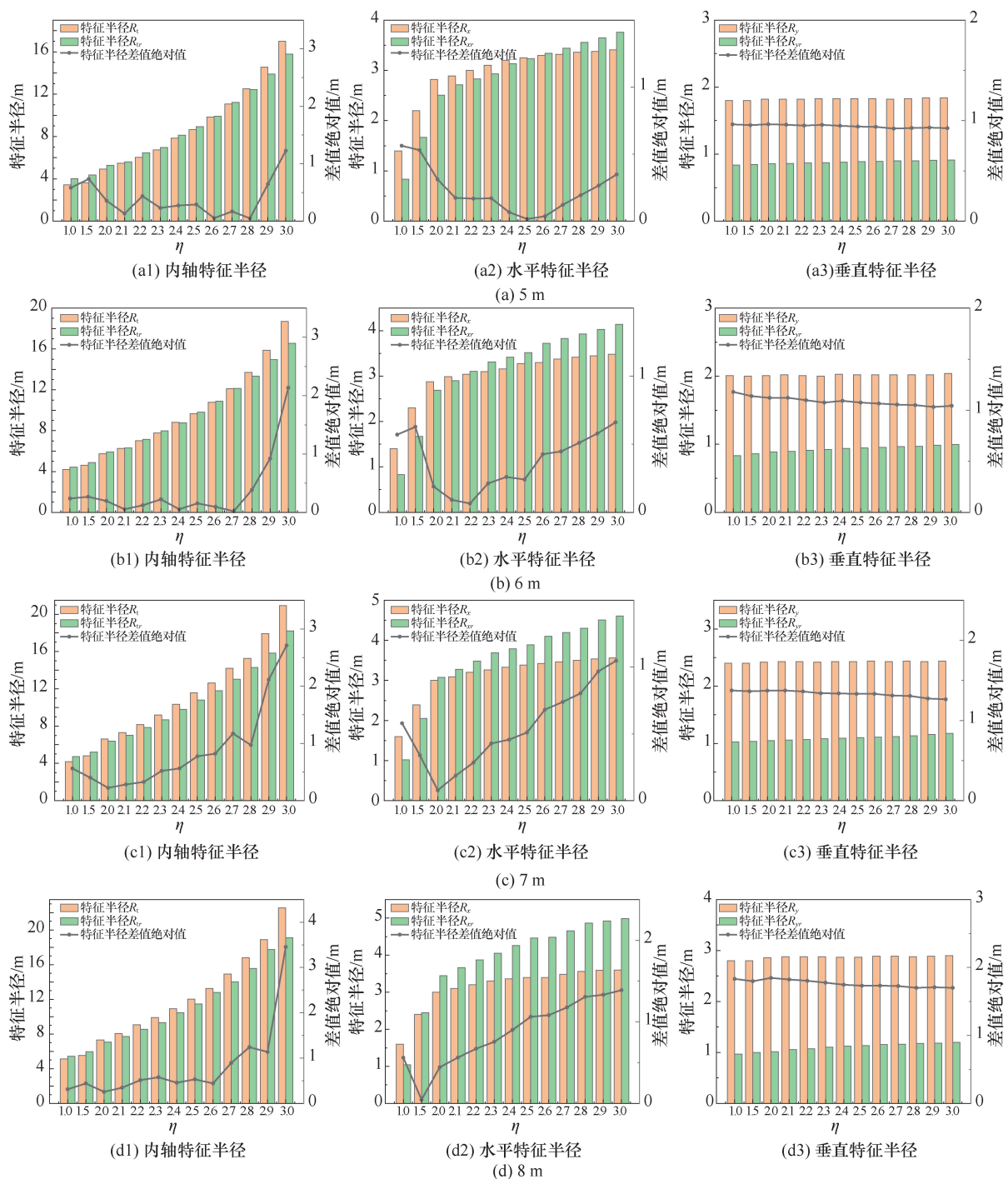


图 15 不同宽度矩形巷道与其对应外接圆巷道特征半径对比

Fig. 15 Contrast of characteristic radius of rectangular roadway with different widths and its circumcircle roadway

### 3.3.3 集中位置适用性

当巷道围岩出现蝶形破坏时,内轴特征半径可以很好地反映蝶形塑性区的扩展状态。因此,随着 $\eta$ 的增大,得到矩形巷道与对应外接圆巷道围岩塑性区内轴特征半径大小与其对应蝶叶角变化,如图 17 所示。

由图 17 可看出,随 $\eta$ 的增大,不同 $\nu$ 的矩形巷道及对应外接圆巷道围岩塑性区蝶叶角均出现了

收敛;矩形巷道围岩塑性区收敛角度略小于外接圆巷道,但收敛角度均处于 $34^\circ \sim 39^\circ$ ,且随矩形巷道宽度的增加,蝶叶角收敛角度略微下降;较小 $\nu$ 的矩形巷道与对应外接圆巷道的蝶叶角收敛角度差值更小,塑性区范围差值也更小。结合图 11 可看出,当矩形巷道宽高比 $\nu=1$ 时,两者蝶叶角差值近乎为 0,但在实际生产中,巷道实际宽高比通常不会大于 2:1,此时收敛角度偏差为 $2^\circ \sim 3^\circ$ 。可见,

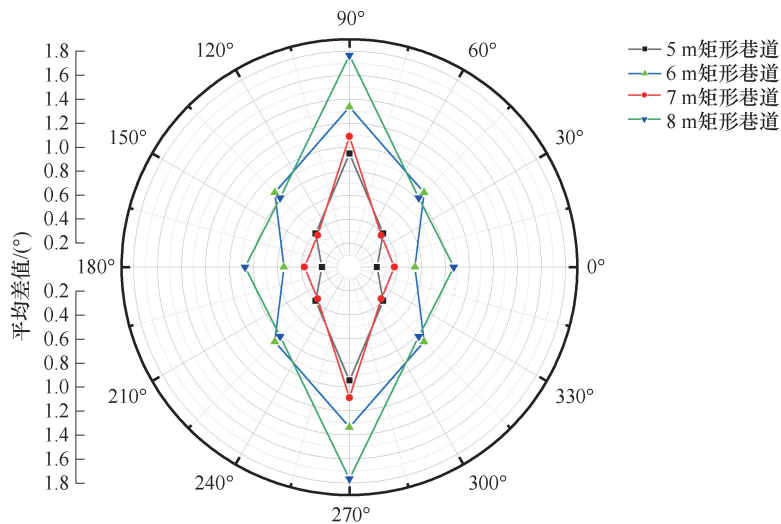


图 16 不同尺寸两断面巷道特征半径平均差值曲线

Fig. 16 Average difference value curve of roadway characteristic radius of two sections with different dimensions

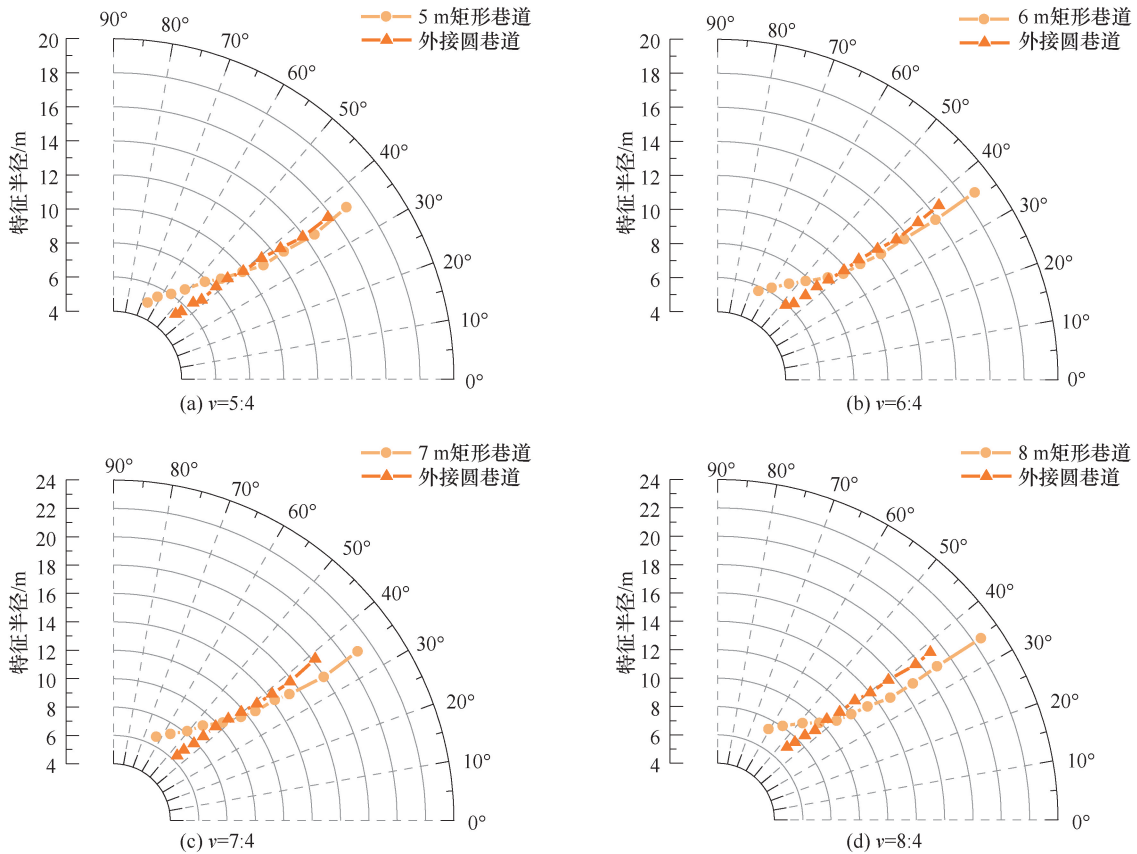


图 17 不同尺寸两断面巷道内轴特征半径与蝶叶角变化

Fig. 17 Characteristic radius of inner axis and butterfly leaf angle of two sections with different dimensions

等效外接圆理论解析方法对一定宽高比范围内的矩形巷道具有良好的适用性。

### 4 结论

(1) 矩形巷道与对应外接圆巷道围岩塑性区形态演化规律一致,均呈现圆形、椭圆形、蝶形 3 种

形态,且在蝶形破坏出现之前,塑性区均沿最小主应力方向扩展。

(2) 矩形巷道围岩塑性区范围略大于对应外接圆巷道,且随  $\nu$  增加差异会进一步扩大;但在工程应用范围内 ( $\nu \leq 2$ ),两者塑性区范围差异一般不会超过 15%,当  $\nu$  趋近于 1 时,两者近乎一致。

(3) 矩形巷道与对应外接圆巷道围岩塑性区的蝶叶角均随  $\eta$  的增大呈现收敛特性,其数值为  $34^\circ \sim 39^\circ$ 。当  $\nu \leq 2$  时,两者收敛角度差异在  $2^\circ \sim 3^\circ$ ;当  $\nu = 1$  时,收敛角度与对应外接圆巷道的几乎相等。

(4) 建立了非均匀应力场中矩形巷道围岩塑性区等效外接圆理论解析方法。在矩形巷道  $\nu \leq 2$  时,可通过对应外接圆巷道围岩塑性区理论解析方法,等效量化矩形巷道围岩塑性区的形态、范围及集中位置。

### 参考文献

- [1] 李桂臣,张农,王成,等. 高地应力巷道断面形状优化数值模拟研究[J]. 中国矿业大学学报,2010,39(5): 652-658.  
LI Guichen, ZHANG Nong, WANG Cheng, et al. Optimizing the section shape of roadways in high stress ground by numerical simulation[J]. Journal of China University of Mining & Technology, 2010, 39(5): 652-658.
- [2] 杨佳楠,李青锋,邓弘哲,等. 矩形与圆形巷道塑性区相关性分析: 侧压系数不大于1[J]. 矿业工程研究,2019,34(4): 10-15.  
YANG Jianan, LI Qingfeng, DENG Hongzhe, et al. Correlation analysis of plastic zone between rectangular and circular tunnel: the lateral pressure coefficient less than 1[J]. Mineral Engineering Research, 2019, 34(4): 10-15.
- [3] 王克义. 红一煤矿巷道断面形状选择及围岩控制技术[J]. 煤炭技术,2015,34(6): 67-70.  
WANG Keyi. Research on optimization selection of roadway cross-sectional shapes and its control technology in hongyi coal mine[J]. Coal Technology, 2015, 34(6): 67-70.
- [4] 张进鹏,刘立民,刘传孝,等. 深部大倾角煤岩层巷道断面形状与耦合支护[J]. 中南大学学报: 自然科学版,2021,52(11): 4074-4087.  
ZHANG Jinpeng, LIU Limin, LIU Chuanxiao, et al. Cross-section shape and coupling support of deep and large inclined coal and rock roadway[J]. Journal of Central South University: Science and Technology, 2021, 52(11): 4074-4087.
- [5] 徐芝纶. 弹性力学[M]. 5版. 北京: 高等教育出版社,2016.  
XU Zhilun. Elasticity. [M]. 5 ed. Beijing: Higher Education Press, 2016.
- [6] 吕爱钟,张路青. 地下隧洞力学分析的复变函数方法[M]. 北京: 科学出版社,2007.  
LÜ Aizhong, ZHANG Luqing. Complex variable function method for mechanical analysis of underground tunnel [M]. Beijing: Science Press, 2007.
- [7] 王少杰,吕爱钟,张晓莉. 正交各向异性岩体中非圆形水工隧洞的解析解[J]. 岩土力学,2018,39(12): 4437-4447,4456.  
WANG Shaojie, LÜ Aizhong, ZHANG Xiaoli. Analytical solution for the non-circular hydraulic tunnel buried in the orthotropic rock mass[J]. Rock and Soil Mechanics, 2018, 39(12): 4437-4447, 4456.
- [8] 施高萍,祝江鸿,李保海,等. 矩形巷道孔边应力的弹性分析[J]. 岩土力学,2014,35(9): 2587-2593,2601.  
SHI Gaoping, ZHU Jianghong, LI Baohai, et al. Elastic analysis of hole-edge stress of rectangular roadway[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, 35(9): 2587-2593, 2601.
- [9] 祝江鸿,杨建辉,施高萍,等. 单位圆外域到任意开挖断面隧洞外域共形映射的计算方法[J]. 岩土力学,2014,35(1): 175-183.  
ZHU Jianghong, YANG Jianhui, SHI Gaoping, et al. Calculating method for conformal mapping from exterior of unit circle to exterior of cavern with arbitrary excavation cross-section[J]. Rock and Soil Mechanics, 2014, 35(1): 175-183.
- [10] 申航,周航,刘汉龙. 弹性半无限空间中矩形孔收缩的复变函数解答[J]. 土木与环境工程学报,2021,43(4): 1-11.  
SHEN Hang, ZHOU Hang, LIU Hanlong. Solution of complex function of rectangular hole contraction in elastic semi-infinite space[J]. Journal of Civil and Environmental Engineering, 2021, 43(4): 1-11.
- [11] 李新源,刘国彬. 浅埋矩形顶管求解的复变函数实践[J]. 河北工程大学学报: 自然科学版,2017,34(4): 1-4,14.  
LI Xinyuan, LIU Guobin. A complex variable solution for rectangle pipejacking in elastic half-plane[J]. Journal of Hebei University of Engineering: Natural Science Edition, 2017, 34(4): 1-4, 14.
- [12] 郑朋强,刘延庆,詹召伟,等. 基于等效圆法的矩形巷道支护优化研究[J]. 煤炭技术,2022,41(3): 10-13.  
ZHENG Pengqiang, LIU Yanqing, ZHAN Zhaowei, et al. Research on support optimization of rectangular roadway based on equivalent circle method[J]. Coal Technology, 2022, 41(3): 10-13.
- [13] H·卡斯特奈. 隧道与坑道静力学[M]. 上海: 上海科学技术出版社,1980.  
KASTNER H. Statics of tunnels and trenches [M]. Shanghai: Shanghai Science and Technology Press, 1980.

- Shanghai:Shanghai Scientific & Technical Publishers, 1980.
- [14] 赵志强,马念杰,郭晓菲,等. 大变形回采巷道蝶叶型冒顶机理与控制[J]. 煤炭学报,2016,41(12): 2932-2939.  
ZHAO Zhiqiang, MA Nianjie, GUO Xiaofei, et al. Falling principle and support design of butterfly-failure roof in large deformation mining roadways[J]. Journal of China Coal Society, 2016, 41(12): 2932-2939.
- [15] 李季,强旭博,马念杰,等. 巷道围岩蝶形塑性区蝶叶方向性形成机制及工程应用[J]. 煤炭学报, 2021, 46(9): 2838-2852.  
LI Ji, QIANG Xubo, MA Nianjie, et al. Formation mechanism and engineering application of the directionality of butterfly leaf in the butterfly plastic zone of roadway rock surrounded[J]. Journal of China Coal Society, 2021, 46(9): 2838-2852.
- [16] 马念杰,赵希栋,赵志强,等. 掘进巷道蝶型煤与瓦斯突出机理猜想[J]. 矿业科学学报,2017,2(2): 137-149.  
MA Nianjie, ZHAO Xidong, ZHAO Zhiqiang, et al. Conjecture about mechanism of butterfly-shape coal and gas outburst in excavation roadway[J]. Journal of Mining Science and Technology, 2017, 2(2): 137-149.
- [17] 郭晓菲,郭林峰,马念杰,等. 巷道围岩蝶形破坏理论的适用性分析[J]. 中国矿业大学学报,2020,49(4): 646-653,660.  
GUO Xiaofei, GUO Linfeng, MA Nianjie, et al. Applicability analysis of the roadway butterfly failure theory[J]. Journal of China University of Mining & Technology, 2020, 49(4): 646-653, 660.
- [18] 李永恩,郭晓菲,马骥,等. 邢东矿深部回采巷道围岩塑性区“蝶形”扩展特征及稳定性控制[J]. 矿业科学学报,2017,2(6):566-575.  
LI Yongen, GUO Xiaofei, MA Ji, et al. Extension characteristics of the “Butterfly-shaped” plastic zone and stability control of deep mining roadway in Xingdong mine[J]. Journal of Mining Science and Technology, 2017, 2(6): 566-575.
- [19] 马念杰,郭晓菲,赵志强,等. 均质圆形巷道蝶型冲击地压发生机理及其判定准则[J]. 煤炭学报, 2016, 41(11): 2679-2688.  
MA Nianjie, GUO Xiaofei, ZHAO Zhiqiang, et al. Occurrence mechanisms and judging criterion on circular tunnel butterfly rock burst in homogeneous medium[J]. Journal of China Coal Society, 2016, 41(11): 2679-2688.
- [20] 赵志强. 大变形回采巷道围岩变形破坏机理与控制方法研究[D]. 北京:中国矿业大学(北京),2014.  
ZHAO Zhiqiang. Study on deformation and failure mechanism and control method of surrounding rock in large deformation mining roadway[D]. Beijing: China University of Mining and Technology-Beijing, 2014.
- [21] 郭晓菲,马念杰,赵希栋,等. 圆形巷道围岩塑性区的一般形态及其判定准则[J]. 煤炭学报,2016,41(8): 1871-1877.  
GUO Xiaofei, MA Nianjie, ZHAO Xidong, et al. General shapes and criterion for surrounding rock mass plastic zone of round roadway[J]. Journal of China Coal Society, 2016, 41(8): 1871-1877.
- [22] 郭晓菲. 巷道围岩塑性区形态判定准则及其应用[D]. 北京:中国矿业大学(北京),2019.  
GUO Xiaofei. Criteria for judging the shape of plastic zone of roadway surrounding rock and its application[D]. Beijing: China University of Mining and Technology-Beijing, 2019.
- [23] 刘洪涛,周光东,韩子俊,等. 多因素影响下巷道围岩稳定性分析及优化设计研究[J]. 矿业科学学报,2024,9(4):504-518.  
LIU Hongtao, ZHOU Guangdong, HAN Zijun, et al. Stability analysis and optimization design of roadway surrounding rock under multiple factors[J]. Journal of Mining Science and Technology, 2024, 9(4): 504-518.

(责任编辑:张彩艳)